Es Sia $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, $s_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} \big| \, z = r\, e^{i\theta_0}, \forall r \geq 0\}$ e $\Omega_{s_0} := \mathbb{C} \setminus s_{\theta_0}$.

(i) Per ogni $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ definire tutti i "rami analitici del logaritmo", ossia trovare <u>tutte</u> le funzioni analitiche $\lambda := \Omega_{\theta_0} \to \mathbb{C}$ tali che

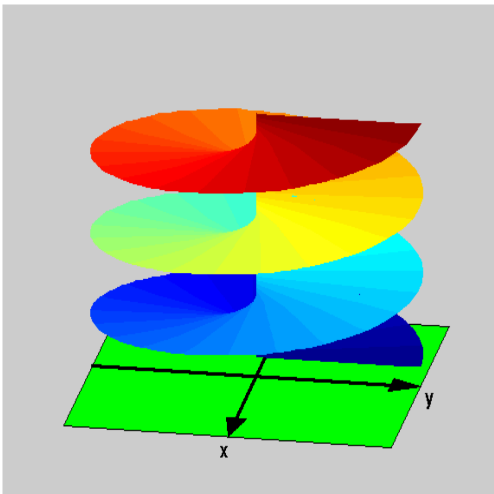
$$e^{\lambda(z)} = z \ , \ \forall \ z \in \Omega_{\theta_0} \, .$$

Determinare $S_{\theta_0} := \lambda(\Omega_{\theta_0})$ e dimostrare che $\lambda\big(e^w\big) = w$, $\forall \ w \in S_{\theta_0}$.

(ii) Introdurre una notazione precisa per tutti i rami del logaritmo e discutere la relazione $\lambda(z_1 z_2) = \lambda(z_1) + \lambda(z_2)$.

(iii) (Superficie di Riemann del logaritmo) Si fissi $\theta_0 = \pi$. È possibile definire un procedimento per "passare da un ramo all'altro in modo analitico"? La costruzione dipende dalla scelta di θ_0?

Per visualizzare in modo intuitivo la costruzione si pensi ad un parcheggio multipiano:



https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-04-complex-variables-with-applications-fall-1999/study-materials/logsurface/

Es 1 Sia $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| = 1\}$ e $j : \hat{\theta} \in \mathbb{T}^1 \mapsto j(\hat{\theta}) := e^{i\theta}$, dove $\theta \in \hat{\theta}$. Sia

$$d(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) := \min_{\substack{\theta_1 \in \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 \in \hat{\theta}_2}} |\theta_1 - \theta_2| \, .$$

(i) Dimostrare che d è una metrica su $\mathbb{T}^1$.
(ii) Dimostrare che j è un omeomorfismo (funzione biunivoca e bi–continua) tra il gruppo additivo $(\mathbb{T}^1, +)$ e il gruppo moltiplicativo $(S^1, \cdot)$.
(iii) Si consideri S^1 come sottospazio metrico di $\mathbb{C}$ e si dimostri che la metrica d su $\mathbb{T}$ è equivalente alla metrica indotta da j^{-1}.

Es 2 (Si usino le notazioni dell **Es** dell'8/3/19)
Sia $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e sia $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$. Sia $\lambda : \Omega_{-\theta_0} \to S_{-\theta_0}$ (suriettiva) tale che $\operatorname{Im} \lambda(z_0) = \theta_0$ e tale che $e^{\lambda(z)} = z$, $\forall \, z \in \Omega_{-\theta_0}$.
Dimostrare che $\operatorname{Im} \lambda(z) \in \arg(z) = \hat{\theta}(1, z)$, $\forall \, z \in \Omega_{-\theta_0}$.

(13/3/19)

Es 1 Dimostrare che se $ad-bc=0$ (a,b,c,d, numeri complessi non tutti nulli) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ è costante (su $\widehat{\mathbb{C}}$).

Es 2 Sia f una mappa di Möbius. Dimostrare che esiste un'*unica* estensione di f a $\widehat{\mathbb{C}}$ che rende f un omeomorfismo di $\widehat{\mathbb{C}}$ su se stesso.

Es 3 Sia $\mathcal{C}$ la famiglia di cerchi o rette di $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.
(i) Si consideri l'equazione per $x,y\in\mathbb{R}$ data da

$$\sigma(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0 \qquad \text{con} \quad \sigma\in\{0,1\}\,. \tag{0.1}$$

Si specifichi per quali valori dei parametri si hanno cerchi (specificandone raggio e centro) o rette e si dimostri che al variare di tali parametri si ottiene la famiglia $\mathcal{C}$.
(ii) Sia $J:(x,y)\mapsto\big(x/(x^2+y^2),-y/(x^2+y^2)\big)$ (che corrisponde a $1/z$ in $\mathbb{C}$). Si dimostri che $J:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ e studiare tale mappa al variare dei parametri (in particolare si dica quando JC è una retta o un cerchio).

Es 4 Dimostrare che il birapporto (z_1,z_2,z_3,z_4) è reale se e solo se esiste $C\in\mathcal{C}$ tale che $z_j\in C$, $\forall\ j$.

Es 5 Dimostrare che dati tre punti $z_j\in\widehat{\mathbb{C}}$ distinti tra loro e tre punti $w_j\in\widehat{\mathbb{C}}$ distinti tra loro, esiste un'unica mappa di Möbius f tale che $f(z_j)=w_j$.

Es 6 (Simmetrie) Siano dati un cerchio generalizzato $C\in\mathcal{C}$ e tre punti distinti $z_j\in C$. Due punti z e z^* si dicono **simmetrici rispetto a** C se

$$(z^*,z_1,z_2,z_3)=\overline{(z,z_1,z_2,z_3)}\,.$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:
(i) $z^*=z$ se e solo se $z\in C$.
(ii) Se $C=\mathbb{R}$, allora $z^*=\overline{z}$.
(iii) Le mappe di Möbius conservano le simmetrie rispetto a due dati cerchi generalizzati).

Es 7 Fare gli esercizi 1-5 di [A], Cap 3, par 3.3.

(17/3/19)

[Ahlfors] Es 1, Sez 4.2 Cap 3

Si trovi una trasformazione conforme che mappi l'intersezione dei dischi

$$D_1 := \{|z| < 1\}\,, \qquad D_2 := \{|z-1| < 1\}$$

su D_1.

Svolgimento Denotiamo C_j i cerchi ∂D_j e $\Omega := D_1 \cap D_2$.
C_1 e C_2 si intersecano nei punti

$$z_\pm := e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Una mappa di Möbius della forma

$$f(z) = c\,\frac{z - z_-}{z - z_+}\,, \qquad c \in \mathbb{C}$$

trasforma i cerchi C_j in rette (poiché uno dei punti comuni viene "esploso" a ∞), mandando z_- in 0, e poiché f è conforme in z_- l'angolo θ interno al "vertice" viene conservato; dunque (poiché f conserva l'orientamento) f manda Ω in una regione delimitata da due semirette con origine in 0 che formano un angolo θ. Scegliamo c in modo da conservare l'asse di simmetria di Ω cioè la retta $\mathrm{Re}\, z = 1/2$, ad esempio, in modo tale che $f(1/2) = 1$, ossia:

$$f(z) := -\frac{z - z_-}{z - z_+}\,.$$

Ora, si vede facilmente che $f(0) = z_+$ e $f(1) = z_-$. Quindi (tenendo conto che f conserva l'orientamento) si ha che f trasforma conformemente Ω nella regione delimitata dalle semirette

$$s_\pm := \{z = t\, z_\pm \big|\, t > 0\}\,.$$

Si osservi che poiché l'angolo tra le due semirette, ossia, l'angolo tra z_- e z_+ è θ, si ha che $\theta = 2\pi/3 + 2\pi\mathbb{Z}$.
Sia $g(z) := z^{3/2} = e^{\frac{3}{2}\,\mathrm{Log}\, z}$ il ramo analitico della potenza 3/2 definita su $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ che vale 1 in 1: g trasforma in modo conforme Ω nel semipiano $\mathrm{Re}\, z > 0$ (si noti che $g(z_\pm) = \pm i$).
Infinite la mappa

$$h(z) := \frac{z-1}{z+1}$$

trasforma il semipiano $\mathrm{Re}\, z > 0$ sul cerchio D_1. Quindi

$$F := h \circ g \circ f$$

mappa conformemente Ω su D_1.

Es (Triangoli) Dati tre punti $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, definiamo il "triangolo di vertici z_j" *l'inviluppo convesso di* z_1, z_2, z_3, ossia l'insieme

$$T := T(z_1, z_2, z_3) := \{z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \big| \, t_j \geq 0 \ , \ t_1 + t_2 + t_3 = 1\} \ .$$

(i) Dimostrare che T è il più piccolo insieme convesso[1] che contiene z_1, z_2 e z_3. Dimostrare che T è chiuso.

(ii) Calcolare $\operatorname{diam} T := \sup\limits_{z,w \in T} |z - w|$.

Risposta: $\operatorname{diam} T = \max\limits_{j,k} |z_j - z_k|$.

(iii) Calcolare l'area di T.

Risposta: $\dfrac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$ dove $z_j = x_j + i y_j$.

[1] Un insieme A si dice convesso se $\forall z, w \in A$, $\{tz + (1-t)w \big| \, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$.

(3/4/19)

Esercizio Dimostrare i seguenti tre lemmi.

Lemma 1 (i) *Sia* Ω *una regione di* $\mathbb{C}$ *e* $f \in C([a,b] \times \Omega, \mathbb{C})$ *tale che, per ogni* $t \in [a,b]$, *la funzione* $z \mapsto f(t,z)$ *è analitica in* Ω. *Allora, la funzione* $F(z) := \int_a^b f(t,z)dt$ *è analitica su* Ω *e* $F'(z) = \int_a^b f_z(t,z)dt$.

(ii) *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due regioni di* $\mathbb{C}$ *e* $f \in C(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{C})$ *tale che, per ogni* $\zeta \in \Omega_1$, *la funzione* $z \mapsto f(\zeta, z)$ *è analitica in* Ω_2. *Allora, per ogni curva* γ *in* Ω_1 *(*C^1 *a tratti) la funzione* $F(z) := \int_\gamma f(\zeta,z)d\zeta$ *è analitica su* Ω_2 *e* $F'(z) = \int_\gamma f_z(\zeta,z)d\zeta$.

Lemma 2 *Sia* Ω *una regione di* $\mathbb{C}$ *e* $f_n \in C(\Omega, \mathbb{C})$ *tali che* $\sum_{n=1}^\infty \sup_\Omega |f_n| < +\infty$. *Allora per ogni curva* γ *in* Ω *(*C^1 *a tratti) si ha*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^\infty f_n dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz\,.$$

Lemma 3 *Sia* D *un disco aperto di* $\mathbb{C}$ *e* $n, m \in \mathbb{N} := \{1,2,3,....\}$. *Allora, per ogni* $z, w \in D$, *si ha*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta - z)^n\,(\zeta - w)^m}\, d\zeta = 0\,, \qquad \forall\, z,w \in D\,,\ \forall\, n,m \geq 1\,.$$

(29/4/19)

Esercizio 1 Sia γ una curva chiusa orientata e $z_0 \notin \gamma$. Sia $\varphi(z) = az + b$ con $a \neq 0$; $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ (ossia, se $\gamma = \{\gamma(t) \big| t \in [a, b]\}$, $\Gamma = \{a\gamma(t) + b \big| t \in [a, b]\}$). Dimostrare che

$$n(\gamma, z_0) = n(\Gamma, \varphi(z_0)).$$

Esercizio 2 Siano C una circonferenza orientata positivamente centrata in 0 (ossia, $C = \{re^{it} \big| t \in [0, 2\pi]\}$) e siano $z_\pm \in C$ tali che $\operatorname{Im} z_+ > 0 > \operatorname{Im} z_-$.

(i) Definire analiticamente le curve (orientate) C_1 e C_2 di estremi z_- e z_+ e tali che $C = C_1 + C_2$.

Dimostrare che $C_1 \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ e che $C_2 \cap [0, +\infty) = \emptyset$.

(15/5/19)

Esercizio 1 Sia γ una curva chiusa orientata, f una funzione continua su γ e φ una trasformazione conforme e iniettiva in un intorno di γ. Dimostrare che vale la seguente formula ("cambio di variabile"):

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\varphi^{-1}(\gamma)} f \circ \varphi(\zeta)\ \varphi'(\zeta)\, d\zeta\ .$$

Discutere il caso in cui φ non è iniettiva.

Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$.

Esercizio 3 Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{(\cosh x)^2}\, dx$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(20/5/19)

Esercizio (Serie di Fourier di funzioni analitiche)
Sia $\sigma > 0$, $A_\sigma := \{z \in \mathbb{C} \big| \, e^{-\sigma} < |z| < e^\sigma\}$, $S_\sigma := \{t \in \mathbb{C} \big| \, |\operatorname{Im} t| < \sigma\}$.

(i) Sia f analitica e limitata in A_σ e sia $F(t) := f\big(e^{it}\big)$.
Dimostrare che F è analitica e limitata su S_σ e periodica di periodo 2π.
Dimostrare che

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}_n e^{int} \ , \qquad \forall \ t \in S_\sigma \ , \tag{1}$$

dove:

(a) $\hat{F}_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$;

(b) $|\hat{F}_n| \leq M e^{-|n|\sigma}$, dove $M = \sup_{S_s} |F| < +\infty$;

(c) la serie bilaterale in (a) converge assolutamente in S_σ.

(ii) Sia F analitica, limitata in S_σ e periodica di periodo 2π. Si definisca la seguente funzione su A_σ:

$$f(z) = \begin{cases} F\big(-i \log z\big) & \text{se } z \in A_\sigma \backslash [0, +\infty) \\ \\ F\big(-i \log_* z\big) & \text{se } z \in \big(e^{-s}, e^\sigma\big) \end{cases}$$

dove $\log z$ è il ramo principale del logaritmo in $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty)$ (cioè, $\log(-1) = i\pi$, ossia $\operatorname{Im} \log z \in (0, 2\pi)$), mentre $\log_*$ denota il logaritmo *reale* ossia $\log_* z \in \mathbb{R}$ per ogni $z > 0$.

Si dimostri che f è analitica e limitata su A_σ.
Si dimostri che F verifica (1), (a), (b) e (c).

(22/5/19)

Esercizio Sia $\Omega := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ e $z \in \Omega \mapsto \log z = \log|z| + i \arg z \in \mathbb{C}$ il ramo principale del logaritmo ($\log 1 = 0$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$ per ogni $z \in \Omega$).

(i) Trovare tutte le coppie $a, b \in \Omega \times \Omega$ tali che $ab \in (-\infty, 0)$.

(ii) Siano $a, b \in \Omega$ tali che $ab \in \Omega$. Dimostrare che

$$\log(ab) = \log a + \log b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arg a + \arg b \in (-\pi, \pi) \ .$$

(iii) Discutere il valore di $\log(ab)$ se $\arg a + \arg b \notin (-\pi, \pi)$.